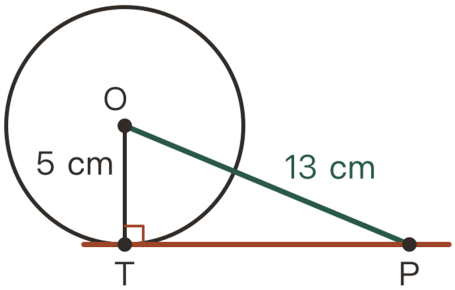
三角形、切線與離散程度

學習講義

從這裏開始：判斷題目給出的角是否為夾角，再用餘弦公式求對邊。

單元二　／　由切點半徑建立直角三角形



O 是圓心，P 是圓外點，PT 在 T 點與圓相切。半徑 OT 長 5 cm，垂直於 PT，連線 OP 長 13 cm。

本冊學習路線

01　兩邊及夾角求第三邊　正文 1 頁
先配對夾角和對邊、先求平方再還原長度

02　由切點半徑建立直角三角形　正文 2 頁
連圓心到切點、按斜邊決定加減

03　從原始數據比較四分位數間距　正文 3 頁
先固定四分位數的取法、比較中間一半的跨度

學以致用　頁 4　　單元測驗　頁 5　　練習參考答案　頁 6

姓名 _____　　班別 _____

日期 _____

01 兩邊及夾角求第三邊

學習目標 判斷題目給出的角是否為夾角，再用餘弦公式求對邊。

重點概念

若角 C 夾在長 a、b 的兩邊之間，其對邊 c 滿足 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$。鈍角的餘弦為負值，計算後須開正平方根。英文卷用語：餘弦公式（cosine formula）。

例題

從 O 沿兩線分別走 5 米及 8 米到 A、B，兩線夾角 60°。求 AB。

1 **先配對夾角和對邊** 在圖上把 60° 標在 OA 和 OB 之間，所求 AB 正正在這個角的對面，可用餘弦公式。

2 **先求平方再還原長度** $AB^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \times 1/2 = 49$。取正平方根得 7 m，介乎兩已知邊之差與和之間。

例題解答 $AB^2=25+64-2\times5\times8\times\cos 60°=49$。因此，7 米。

容易混淆 直接用 $5^2 + 8^2$ 作 AB^2。

怎樣分辨 那樣默認夾角是直角。60° 的餘弦不是零，須保留公式的修正項。

單元 1・隨課練習

三角形兩邊為 7 及 8 厘米，夾角 60°。求第三邊的準確長度。

提示 先指出夾角對面的待求邊，保留平方直至最後。

02 由切點半徑建立直角三角形

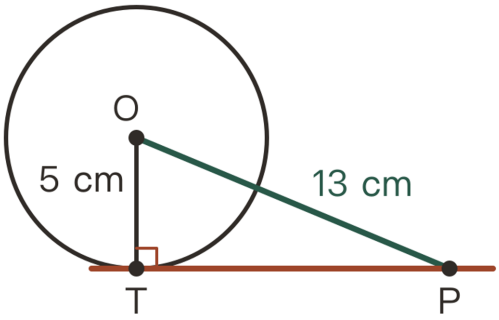
學習目標 辨認半徑與切線在切點成直角，運用畢氏定理處理線段。

重點概念

從圓心 O 連至切點 T，再連至外點 P。直角在 T，故 OP 是斜邊，$OP^2=OT^2+PT^2$。若只給圓外一段，須把它與半徑相加才得中心距。英文卷用語：切點（point of contact）。

例題

圓半徑 5 厘米，外點 P 距圓心 13 厘米，自 P 引切線 PT。求 PT。



O 是圓心，P 是圓外點，PT 在 T 點與圓相切。半徑 OT 長 5 cm，垂直於 PT，連線 OP 長 13 cm。

1. **連圓心到切點** 設圓心 O。半徑 OT 垂直於切線 PT，所以直角在 T，連心到外點的 OP 為斜邊。
2. **按斜邊決定加減** $PT^2 = OP^2 - OT^2 = 169 - 25 = 144$。長度取正根，PT 為 12 cm。

例題解答　$PT^2=13^2-5^2=144$。因此，12 厘米。

容易混淆　以為切線段是斜邊，寫 $PT^2 = OP^2 + OT^2$。

怎樣分辨　斜邊一定正對直角。先標切點的直角，再找對邊即可。

單元 2・隨課練習

自圓外點 A 引切線 AB，B 為切點，AB=15 米，半徑 8 米。求 A 到圓心的距離。

提示　先找切點並標直角，再決定已知長是否為整條斜邊。

03 從原始數據比較四分位數間距

學習目標 用相同四分位數約定，找出中間一半數據的分散程度。

重點概念

先排序；本單元用上下半組的中位數作 Q_1、Q_3。四分位數間距 $IQR=Q_3-Q_1$。IQR 較大表示中間一半的數據較分散。英文卷用語：四分位數間距（interquartile range）。

例題

A 組為 1,2,4,5,6,7,9,10；B 組為 2,3,4,5,6,7,8,9。用上下半組中位數比較 IQR。

1 **先固定四分位數的取法** 每組 8 個數已排序。下半組和上半組各有 4 個數，分別取其中間兩數的平均來求 Q_1 和 Q_3。

2 **比較中間一半的跨度** A 組兩界是 $(2+4)/2=3$ 和 $(7+9)/2=8$；B 組是 3.5 和 7.5。用上界減下界，A 的跨度多 1。

例題解答 A 的 $Q_1=3$、$Q_3=8$；B 的 $Q_1=3.5$、$Q_3=7.5$。因此，A 為 5，B 為 4；A 較分散。

比較中間一半數據的跨度

組別	下、上四分位數	IQR
A	3、8	5
B	3.5、7.5	4

容易混淆 用兩組的最大值減最小值來比較 IQR。

怎樣分辨 最大值減最小值是全距。IQR 只量中間一半數據的跨度，要先找兩個四分位數。

單元 3・隨課練習

甲組為 4,5,5,6,6,8,10,12；乙組為 3,4,6,6,7,9,11,15。用上下半組中位數比較 IQR。

提示 每組先排序，對 8 個數據取第 2、3 項平均及第 6、7 項平均。

學以致用

單元 1・換個情境

兩條長 4 m、6 m 的邊夾 120°，其對邊平方是多少？

單元 2・換個情境

圓半徑 7 cm，從外點引切線。若外點距圓心 25 cm，切線段長會比 25 cm 短多少？

單元 3・換個情境

數據 1、3、4、6、7、9、10、12 中，將 12 改為 20。沿用上下半組中位數法，IQR 如何改變？

單元測驗

作答要求 請獨立作答，寫下思路，完成後交給老師或家長評閱。

第 1 題

兩條小徑由同一處伸出，夾角 120°，長 3 及 5 公里。求兩終點的直線距離。寫出理據或算式。

第 2 題

圓外點 P 距圓周最近處 9 厘米，圓半徑 8 厘米。求自 P 引出的切線段長。寫出理據或算式。

第 3 題

A、B 兩組依次排列的數據為 A：2,4,6,7,8,10,12,14；B：1,5,7,8,9,10,12,18。用上下半組中位數比較 IQR。寫出理據或算式。

練習參考答案

單元 1 兩邊及夾角求第三邊

講義練習 $c^2=49+64-2\times7\times8\times\cos 60°=57$。答案：$\sqrt{57}$ 厘米。

學以致用 $\cos 120° = -1/2$，得 $16 + 36 - 48 \times (-1/2) = 76$ m^2。

單元 2 由切點半徑建立直角三角形

講義練習 $AO^2=15^2+8^2=289$。答案：17 米。

學以致用 切線段長為 $25^2 - 7^2$ 的正平方根，即 24 cm，短 1 cm。

單元 3 從原始數據比較四分位數間距

講義練習 甲為 $(8+10)/2-(5+5)/2=4$；乙為 $(9+11)/2-(4+6)/2=5$。答案：甲為 4，乙為 5；乙較分散。

學以致用 $Q_1 = 3.5$，$Q_3 = 9.5$，前後都相同，所以 IQR 仍為 6。

回看一題 選一題，寫下你用來核對答案的算式或方法。