數列、變分與圓方程

學習講義

從這裏開始：由兩個不同位置的項數解出公差和首項，再推算另一項。

單元一　／　由已知項向後推

項數	距第 7 項步數	該項數值
第 7 項	0	29
第 8 項	1	33
第 12 項	5	49

本冊學習路線

01　由兩項重建等差數列　正文 1 頁
用項數差數步數、從最接近的已知項出發

02　由聯變關係預測量值　正文 2 頁
分別追蹤兩個改變、把兩個倍數相乘

03　由一般式讀取圓心和半徑　正文 3 頁
按變數分組配方、對照圓的標準式

學以致用 頁 4　　單元測驗 頁 5　　練習參考答案 頁 6

姓名 _____　　班別 _____

日期 _____

01 由兩項重建等差數列

學習目標 由兩個不同位置的項數解出公差和首項，再推算另一項。

重點概念

等差數列第 n 項 $A_n=a+(n-1)d$。兩個已知項相減可消去 a；分母是兩項的位置差。例如第 3 至第 8 項之間有五個間距。英文卷用語：公差（common difference）。

例題

等差數列第 3 項是 13，第 7 項是 29。求第 12 項。

1 **用項數差數步數** 從第 3 項到第 7 項經過四次公差，總增加 29 − 13 = 16。所以每次增加 4。

2 **從最接近的已知項出發** 第 12 項比第 7 項多五步，29 + 5 × 4 = 49。毋須先求首項。

例題解答 d=(29−13)/(7−3)=4，第 12 項=29+5×4。因此，49。

由已知項向後推

項數	距第 7 項步數	該項數值
第 7 項	0	29
第 8 項	1	33
第 12 項	5	49

容易混淆 把第 3 至第 7 項共五項當成五個間距。

怎樣分辨 五個位置之間只有四段，如同數線上數兩點間的步數。

單元 1・隨課練習

禮堂每排座位數成等差數列，第 4 排 22 個，第 10 排 40 個。第 15 排有多少座位？

提示 先計算單個間距增加或減少的數，再由最近的一項推算。

02 由聯變關係預測量值

學習目標 把正比、反比及平方關係寫成聯變模型，再按條件換算。

重點概念

若 y 與 x 的平方成正比且與 z 成反比，寫 $y=kx^2/z$。同一模型的兩組數據可相除以消去 k。平方作用於倍率本身。英文卷用語：聯變（joint variation）。

例題

y 與 x^2 成正比，與 z 成反比。當 x=3、z=2 時 y=18。求 x=6、z=8 時的 y。

1 **分別追蹤兩個改變** x 從 3 增至 6，是原來 2 倍，令 y 乘 2^2。z 從 2 變 8，是原來 4 倍，反比令 y 除以 4。

2 **把兩個倍數相乘** $4 \times 1/4 = 1$，所以兩個改變恰好抵銷。也可由 $y = kx^2/z$ 求得 $k = 4$ 再代入。

例題解答　$y=18\times(6/3)^2\times(2/8)$。因此，y=18。

容易混淆　以為 x 加倍就只令 y 加倍。

怎樣分辨　聯變式內是 x^2，必須先把 x 的改變倍數平方。

單元 2・隨課練習

模型中阻力 F 與速度 v^2 及面積 A 的乘積成正比。原阻力 24 牛頓；速度加至原來的 1.5 倍且面積減半。求新阻力。

提示　把每個變量的倍率列成分數，再依模型決定乘、除或平方。

03 由一般式讀取圓心和半徑

學習目標 配方把圓的一般方程寫成標準式，讀出圓心及半徑。

重點概念

先令 x^2 及 y^2 的係數均為 1，再分組配方。標準式右邊是半徑的平方；圓心坐標要取括號內常數的相反數。英文卷用語：圓心（centre of a circle）。

例題

求圓 $x^2+y^2-6x+4y-12=0$ 的圓心及半徑。

1 **按變數分組配方** x^2-6x 要補 9 才成 $(x-3)^2$，y^2+4y 要補 4 才成 $(y+2)^2$。兩邊都加上這些數。

2 **對照圓的標準式** 右邊原為 12，加 9 和 4 得 25。與 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 比較，得 $h=3$、$k=-2$、$r=5$。

例題解答 $(x-3)^2+(y+2)^2=25$。因此，圓心 $(3,-2)$，半徑 5。

容易混淆 把右邊 25 當作半徑。

怎樣分辨 標準式右邊是半徑的平方。可由圓心向右走 5，代回圓方程驗證。

單元 3・隨課練習

求圓 $x^2+y^2+8x-2y+8=0$ 的圓心及半徑。

提示 把一次項係數對半，分別完成兩個平方。

學以致用

單元 1・換個情境

等差數列第 4 項為 20，第 9 項為 5。求第 12 項。

單元 2・換個情境

同一關係下，x 減半、z 變為原來的兩倍，y 是原來的多少倍？

單元 3・換個情境

圓的方程為 $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0$。點 (2,4) 是否在圓上？用圓心和半徑說明。

單元測驗

作答要求 請獨立作答，寫下思路，完成後交給老師或家長評閱。

第 1 題

等差數列的第 5 項為 32，第 9 項為 20。求首項。寫出理據或算式。

第 2 題

完成工作的時間 T 與工量 W 成正比，與人數 n 成反比。6 人做 90 件用 5 小時；同效率下，10 人做 150 件需多久？寫出理據或算式。

第 3 題

求圓 $2x^2+2y^2-4x-12y-12=0$ 的圓心及半徑。寫出理據或算式。

練習參考答案

單元 1 由兩項重建等差數列

講義練習 d=(40−22)/6=3，第 15 排 =40+5×3。答案：55 個。

學以致用 5 步共減 15，公差 −3。由第 9 項再走 3 步，得 5 − 9 = −4。

單元 2 由聯變關係預測量值

講義練習 $F=24\times1.5^2\times0.5$。答案：27 牛頓。

學以致用 平方部分變為 1/4，反比部分再乘 1/2，所以是原來的 1/8。

單元 3 由一般式讀取圓心和半徑

講義練習 $(x+4)^2+(y-1)^2=9$。答案：圓心 (−4,1)，半徑 3。

學以致用 配方得 $(x+1)^2+(y-4)^2=9$，圓心 (−1,4)，半徑 3。該點在圓心正右方 3 個單位，所以在圓上。

回看一題 選一題，寫下你用來核對答案的算式或方法。