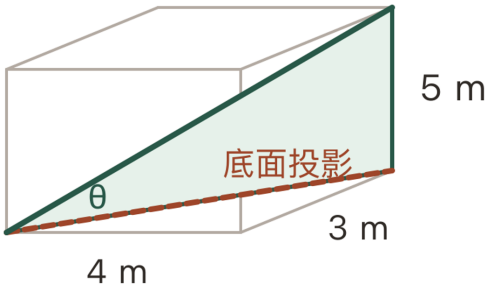
空間角與數據變換

學習講義

從這裏開始：利用參考角及象限解三角方程，列齊指定範圍內所有角。

單元二　／　斜線與水平面的交角



長方體底面兩邊為 4 m 和 3 m，垂直高度 5 m。角 θ 在體對角線與它的底面投影之間；底面投影是底面的對角線。

本冊學習路線

01　在一周內尋找全部角　正文 1 頁
化為單一三角比、按符號及範圍補齊角

02　斜線與水平面的交角　正文 2 頁
在平面上找投影、在包含投影的直角三角形求角

03　線性變換後的平均數與標準差　正文 3 頁
看整體如何平移、看各分數離平均多遠

學以致用　頁 4　　單元測驗　頁 5　　練習參考答案　頁 6

姓名 _____　　班別 _____

日期 _____

01 在一周內尋找全部角

學習目標 利用參考角及象限解三角方程，列齊指定範圍內所有角。

重點概念

先化成單一三角比，再找銳參考角。正弦在第一、二象限為正，餘弦在第一、四象限為正，正切在第一、三象限為正。檢查端點。英文卷用語：參考角（reference angle）。

例題

在 $0°\le\theta<360°$ 解 $2\sin\theta=1$。

1 **化為單一三角比** 兩邊除以 2，得 $\sin\theta = 1/2$。先由熟悉的特殊角得參考角 30°。

2 **按符號及範圍補齊角** 正弦為正時在第一、二象限均有解。第二象限與 180° 相差 30°，所以另一解為 150°。

例題解答 $\sin\theta=1/2$，參考角 30°，在第一、二象限。因此，$\theta=30°、150°$。

容易混淆 只寫計算機顯示的 30°。

怎樣分辨 反正弦顯示主值，一周內還要用對稱位置找另一角，最後檢查題設範圍。

單元 1・隨課練習

在 $0°\le t<360°$ 解 $2\cos t=-1$。

提示 根據正負號選象限，再由參考角還原各角。

02 斜線與水平面的交角

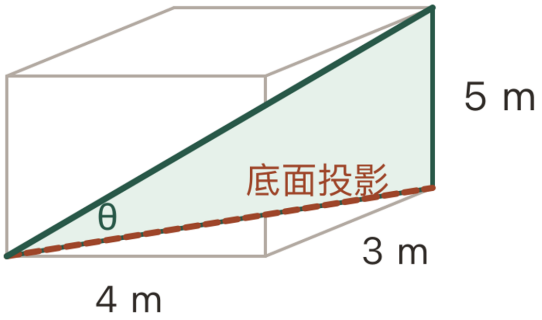
學習目標 畫出空間線段在水平面的投影，用直角三角形求斜角。

重點概念

將高點垂直投影至底面，連起垂足及線段的地面端點。底面投影若是矩形對角線，先用畢氏定理；仰角的對邊是垂高。英文卷用語：正射投影（orthogonal projection）。

例題

一長方體底面 3 米乘 4 米，高 5 米。求體對角線與底面的夾角。



長方體底面兩邊為 4 m 和 3 m，垂直高度 5 m。角 θ 在體對角線與它的底面投影之間；底面投影是底面的對角線。

1 **在平面上找投影** 從體對角線的上端垂直落到底面，連到下端，便得到它在底面的投影，即底面對角線。

2 **在包含投影的直角三角形求角** 底面對角線由 3、4 兩邊求得 5，直立高度也是 5。所求角在體對角線與投影之間，$\tan\theta = 5/5$。

例題解答 底面對角線 5 米，$\tan\theta = 5/5$。因此，45°。

容易混淆 選底面長 4 的一條側邊作鄰邊。

怎樣分辨 這條邊沒有連接兩個投影端點。畫出垂足可認清與體對角線同面的直角三角形。

單元 2・隨課練習

燈柱頂點在地面點 P 正上方 6 米。從觀測點向東 6 米、再向北 8 米到 P。求仰角至 0.1°。

提示 求出底面兩點間的距離，用 $\tan\theta$ = 垂高 ÷ 水平投影長。

03 線性變換後的平均數與標準差

學習目標 預測整組數據經比例及平移後的中心及離散程度。

重點概念

若每項由 X 變成 aX+b，新平均數是 a 乘原平均數再加 b；新標準差是原標準差的正數倍 |a|。平移不改變各值與平均數的距離。英文卷用語：標準差（standard deviation）。

例題

測驗平均分 54，標準差 6。新分為原分乘 1.5 再加 4。求新平均數及標準差。

1 **看整體如何平移** 每個分數都乘 1.5 再加 4，平均也依同一式改變，由 54 變成 81 + 4 = 85。

2 **看各分數離平均多遠** 乘 1.5 使距離放大 1.5 倍，同加 4 又讓分數與平均同步移動，彼此距離不變。所以標準差變 9。

例題解答 平均數 =1.5×54+4，標準差 =1.5×6。因此，平均 85 分，標準差 9 分。

容易混淆 把標準差也算成 1.5 × 6 + 4。

怎樣分辨 標準差量度分散程度。整批平移後，分數彼此的距離沒有加 4。

單元 3・隨課練習

一組數據平均 8、標準差 3。若新值 Y=20−2X，求 Y 的平均數及標準差。

提示 先把變換寫成 aX+b，分別處理平均數及標準差。

學以致用

單元 1・換個情境

在 $0° \le \theta < 360°$ 求 $\sin\theta = -1/2$ 的全部解。

單元 2・換個情境

底面 6 m × 8 m、高 5 m 的長方體，體對角線與底面夾角的正切是多少？

單元 3・換個情境

原平均 10、標準差 3。每個數改成 $20 - 2x$，新平均和標準差各為多少？

單元測驗

作答要求 請獨立作答，寫下思路，完成後交給老師或家長評閱。

第 1 題

在 $0° \le x < 360°$ 解 $\tan x = -1$。寫出理據或算式。

第 2 題

箱底 6 厘米乘 8 厘米，高 8 厘米。求體對角線對底面的斜角至 0.1°。寫出理據或算式。

第 3 題

氣溫的攝氏平均為 20、標準差 5。華氏溫度 $F = 1.8C + 32$，求華氏平均及標準差。寫出理據或算式。

練習參考答案

單元 1 在一周內尋找全部角

講義練習 cos t=−1/2，參考角 60°，在第二、三象限。答案：t=120°、240°。

學以致用 第三、四象限為負，參考角 30°，得 210°、330°。

單元 2 斜線與水平面的交角

講義練習 水平距離 10 米，$\theta=\tan^{-1}(6/10)$。答案：31.0°。

學以致用 投影長 10 m，$\tan\theta = 5/10 = 1/2$。

單元 3 線性變換後的平均數與標準差

講義練習 平均數 =20−2×8，標準差 =2×3。答案：平均 4，標準差 6。

學以致用 平均變成 20 − 20 = 0。距離放大 2 倍，標準差為 6。

回看一題 選一題，寫下你用來核對答案的算式或方法。