因式、餘式與配方法

學習講義

從這裏開始：把面積或整數條件譯成一元二次方程，按情境選取可用的解。

單元三　／　對稱的 x 值有相同的 y

x	$(x-3)^2$	y
2	1	6
3	0	5
4	1	6

本冊學習路線

01　因式分解與解的取捨　正文 1 頁
以闊表示長和面積、先求代數根再看實際限制

02　餘式定理與未知係數　正文 2 頁
找使除式為零的值、把餘數變成等式

03　配方法看最大或最小值　正文 3 頁
補成完整平方、找能達到的下界

學以致用　頁 4　　單元測驗　頁 5　　練習參考答案　頁 6

姓名 _____　　班別 _____

日期 _____

01 因式分解與解的取捨

學習目標 把面積或整數條件譯成一元二次方程，按情境選取可用的解。

重點概念

先把等號右方化為零，再因式分解。每個因式均可能等於零；長度必須為正，連續整數則須按題意決定能否為負。英文卷用語：因式分解（factorisation）。

例題

一長方形長比闊多 3 厘米，面積為 40 平方厘米。求闊。

1 **以闊表示長和面積** 設闊為 x cm，長便是 $x + 3$ cm。由面積得 $x(x + 3) = 40$，移項成 $x^2 + 3x - 40 = 0$。

2 **先求代數根再看實際限制** 尋找積 -40、和 3 的兩數 8 和 -5，得 $(x + 8)(x - 5) = 0$。只有 5 可作闊，驗算 $5 \times 8 = 40$。

例題解答 $(x+8)(x-5)=0$，得 -8 或 5；闊為正。因此，闊 5 厘米。

容易混淆 未把式子整理為零便令每個因式等於零。

怎樣分辨 只有兩因式的積等於零，才能斷言其中一個為零。

單元 1・隨課練習

一塊長方形木板長比闊多 4 米，面積為 45 平方米，求長。

提示 設較短一邊為 x，把兩邊的積移到同一邊。

02 餘式定理與未知係數

學習目標 由一次除式的餘數求多項式中的未知常數。

重點概念

除以 $x-a$ 時，餘數等於 $P(a)$。遇到 $x+3$ 要代入 -3；若除式是 $2x-4$，先找令除式為零的 x。英文卷用語：餘式定理（remainder theorem）。

例題

$P(x)=x^2+kx+2$ 除以 $x-3$ 的餘數是 5，求 k。

1 **找使除式為零的值** 除式 $x-3$ 在 $x=3$ 時為零。把 $P(x)$ 寫成 $(x-3)Q(x)+r$，可見代 3 正好餘下 r。

2 **把餘數變成等式** 代入 $P(3)=5$ 得 $9+3k+2=5$。求得 $k=-2$，回代檢查 $9-6+2=5$。

例題解答 $P(3)=9+3k+2=5$，$3k=-6$。因此，$k=-2$。

容易混淆 見到 $x-3$ 便將 -3 代入。

怎樣分辨 先解 $x-3=0$，代入的數應為 3。

單元 2・隨課練習

$P(x)=2x^2+kx-3$ 除以 $x+2$ 的餘數是 1，求 k。

提示 令除式等於零，再把所得的 x 代入多項式。

03 配方法看最大或最小值

學習目標 用頂點式找二次函數的極值及其發生條件。

重點概念

先提出二次項係數，完成平方，再以平方恆不小於零判斷。若只有有限定義域，要檢查頂點落在範圍內。英文卷用語：配方法（completing the square）。

例題

對所有實數 x，求 $y=x^2-6x+14$ 的最小值及相應 x。

1 **補成完整平方** 把 x 的係數 -6 除以 2 得 -3，$(x-3)^2$ 展開含常數 9，所以原來的 14 應拆成 $9+5$。

2 **找能達到的下界** 平方數最小是 0，當 $x-3=0$ 時剛好達到。因此整式最小為 5，對應 $x=3$。

例題解答 $y=(x-3)^2+5$，平方最小為 0。因此，x=3 時最小值為 5。

對稱的 x 值有相同的 y

x	$(x-3)^2$	y
2	1	6
3	0	5
4	1	6

容易混淆 看到括號內 -3，便答 $x=-3$。

怎樣分辨 使 $(x-3)^2$ 消失的條件是 $x-3=0$。可直接把兩個候選值代入比較。

單元 3・隨課練習

某模型的高度 $h=-t^2+8t+1$ 米，$0\le t\le 8$，t 以秒計。求最大高度及時間。

提示 把首兩項配成完全平方；平方項係數的正負決定極值種類。

學以致用

單元 1・換個情境

長比闊多 1 cm，面積 56 cm^2。列式並指出應捨哪一根。

單元 2・換個情境

$P(x) = x^2 + kx + 1$ 除以 $x + 2$ 餘 9。求它除以 $x - 1$ 的餘數。

單元 3・換個情境

求 $y = -(x + 2)^2 + 7$ 的最大值及相應 x。

單元測驗

作答要求 請獨立作答，寫下思路，完成後交給老師或家長評閱。

第 1 題

兩個相連正整數的積為 72，求較大的一個。寫出理據或算式。

第 2 題

$P(x)=x^3+kx+4$ 除以 $x-2$ 的餘數是 6，求 k。寫出理據或算式。

第 3 題

當 x 為實數，求 $2x^2+8x+11$ 的最小值及相應 x。寫出理據或算式。

練習參考答案

單元 1 因式分解與解的取捨

講義練習 $x(x+4)=45$，得 $(x+9)(x-5)=0$；取闊 5。答案：長 9 米。

學以致用 $x^2 + x - 56 = (x + 8)(x - 7) = 0$。捨 -8，闊 7 cm。

單元 2 餘式定理與未知係數

講義練習 $P(-2)=8-2k-3=1$。答案：$k=2$。

學以致用 代 $x = -2$ 得 $5 - 2k = 9$，故 $k = -2$。再代 1，$P(1) = 1 - 2 + 1 = 0$，餘數為 0。

單元 3 配方法看最大或最小值

講義練習 $h=-(t-4)^2+17$，$t=4$ 在範圍內。答案：4 秒時最高 17 米。

學以致用 平方外有負號，扣去的數最少是 0。$x = -2$ 時最大值為 7。

回看一題 選一題，寫下你用來核對答案的算式或方法。